

Лекция 5. Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы өтетін кесінді берілсін.

Осы кесіндіні $\lambda > 0$ қатынасындай етіп бөлетін $N(x; y; z)$ нүктесінің координаттары: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$,

$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ - **кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулаларымен** анықталады. Егер $\lambda = 1$

болса, яғни $\overline{AN} = \overline{NB}$ онда

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ - **кесіндінің ортасын табу формуласы.**

Түзудің жалпы теңдеуі

Түзудің жалпы теңдеуі келесі түрде жазылады :

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

A , B және C коэффициенттері әр түрлі мәндерінде түзу Оху жазықтықта әр түрлі орналасады.

Егер $A=0$ болса, онда түзу Ox өсіне параллель өтеді; егер $B=0$ болса, онда түзу Oy өсіне параллель өтеді; егер $C=0$ болса, онда түзу жүйенің бас нүктесі арқылы өтеді.

Түзудің бұрыштық коэффициент арқылы берілген теңдеуі.

Егер $B \neq 0$ болса, онда (1) теңдеуінен $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ($-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$):

$$y = kx + b \quad (2)$$

мұндағы $k = \tan \alpha$ - бұрыштық коэффициент деп атайды; b - түзудің Oy ості қиғанда одан ажырататын кесінді мөлшері.

Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

Түзу $M_0(x_0, y_0)$ және $M_1(x_1, y_1)$ нүктелерінен өтсін. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y)$ нүктесін аламыз.

Сонда бұл түзудің теңдеуі төмендегідей болады:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (3)$$

Түзудің кесінділік теңдеуі

Түзу $M_0(a, 0)$ және $M_1(0, b)$ нүктелері арқылы өтсін. Сонда (3) формуласынан түзудің кесінділік теңдеуін аламыз:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4)$$

Берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Берілген $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден берілген k -бағытта өтетін түзу теңдеуі :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (5)$$

Екі түзудің арасындағы бұрыш. $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштың формуласы:

$$\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (6)$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $k_1 = k_2$, ал түзулер перпендикуляр болса, онда $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

болады. Түзулер $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ теңдеулерімен берілсе, онда

$\bar{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2; B_2)$ болғандықтан түзулердің арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{n_1 n_2}}{\|\bar{n}_1\| \|\bar{n}_2\|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (7)$$

Осыдан егер түзулер параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, ал перпендикуляр болса, онда $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ болады.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық.

$M_0(x_0, y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

2-мысал. $O(0;0)$ нүктесінен $6x + 8y + 20 = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 20|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{20}{10} = 2$$

Кеңістіктегі жазықтық пен түзулер. Жазықтықтың теңдеуі

1. Берілген нүкте арқылы, берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі

Жазықтықта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі және оған перпендикуляр $\bar{n} = (A; B; C)$ векторы берілсін. Сонда берілген нүкте арқылы, берілген векторға перпендикуляр өтетін жазықтықтың теңдеуі төменгідей болады:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.1)$$

2. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5.2)$$

Егер $D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы өтеді; егер $C=0$ онда, жазықтық Oz өсіне параллель өтеді; егер $C=D=0$ болса, онда жазықтық бас нүкте арқылы Oz өсіне параллель өтеді; егер $A=B=D=0$ болса, онда $z=0$ болады. Бұл Oxy жазықтығы.

3. Үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі. $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

4. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5.4)$$

5. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Жазықтықтар $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ теңдеулерімен берілсе, онда $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ болғандықтан жазықтықтардың арасындағы бұрыш осы екі нормальдің арасындағы бұрышқа тең:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{n_1} \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (5.5)$$

Осыдан егер жазықтықтар параллель болса, онда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, ал перпендикуляр болса, онда

$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ болады.

6. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ түзуіне дейінгі қашықтықтың формуласы:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5.6)$$

Кеңістіктегі түзудің теңдеулері

1. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Түзу $M_0(x_0, y_0, z_0)$ және $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктелерінен өтсе, онда оның теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (5.7)$$